Bellavista, 18 de octubre, 2022

Señor(a):

RESOLUCIÓN DECANAL N° 130-2022-D-FCNM. - Bellavista 18 de octubre de 2022.- EL DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO:

Visto el Proveído N° 633-2022-D-FCNM, recibido en forma virtual el 07 de octubre de 2022, por medio del cual el Presidente del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis presenta el Dictamen, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, e informa, que el proyecto titulado "FUNCIONES GAP MULTIPARAMÉTRICAS PARA LA REFORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE DESIGUALDAD VARIACIONAL COMO UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DIFERENCIABLE IRRESTRICTO"; presentado por el Bachiller RICRA MAYORCA JUAN MANUEL, ha sido evaluado y se resuelve aprobarlo.

CONSIDERANDO:

Que, el Art. 32° de la Ley Universitaria Ley N° 30220, norma que las Facultades son unidades de formación académica, profesional y de gestión, el Art. 70° numeral 2, 3 y 5, norma las atribuciones del Decano, a través de los Directores de los Departamentos, Directores de las Escuelas Profesionales, Unidad de Investigación y la unidad de Posgrado, y las demás dependencias, respectivamente; a fin de lograr un desarrollo académico y administrativo eficaz y eficiente, concordante con la misión, visión y valores de la Facultad FCNM;

Que, mediante Resolución del Consejo Universitario Nº 099-2021-CU de fecha 30 de junio del año 2021, se aprobó el Reglamento de Grados y Títulos de Pregrado de la Universidad Nacional del Callao, señalando en el Art. 33° que la titulación profesional por la modalidad de tesis se realiza por uno de los dos procedimientos: a) Sin ciclo de tesis, y b) Con ciclo de tesis; asimismo, en su Art. 73° precisa sobre la documentación que debe presentar el estudiante o egresado para aprobar su proyecto de tesis y acceder a la titulación profesional mediante dicha modalidad;

Que, con Resolución Rectoral Nº 285-2021-R de fecha 17 de mayo de 2021, se aprobó la Directiva Nº 002-2021-R PARA LA TITULACIÓN PROFESIONAL POR LA MODALIDAD DE TESIS CON CICLO DE TALLER DE TESIS EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO;

Que, con RESOLUCIÓN DECANAL Nº 021-2019-D-FCNM de fecha 04 de febrero de 2019 se aprueba la APERTURA, INSCRIPCIÓN Y DESARROLLO DEL TERCER CICLO TALLER DE TESIS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, designándose al mismo tiempo, al Profesor ordinario, adscrito al Departamento Académico de Matemática Lic. JUAN BENITO BERNUI BARROS, Coordinador del Tercer Ciclo Taller de Tesis, para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática, cumpliendo con las funciones establecidas en los artículos 46°, 47° 48° y 49° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado mediante Resolución de Consejo Universitario Nº 099-2021-CU, el 30 de junio de 2021;

Que, con Resolución de Consejo de Facultad Nº 028-2021-CF-FCNM de fecha 15 de marzo del 2021, se aprobó el PROYECTO DEL III CICLO TALLER DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, que incluye el Cronograma de Actividades, docentes de cada módulo, **Asesores**, programación horaria, presupuesto y Personal Administrativo, con las modificaciones realizadas por el Consejo de Facultad, el mismo que consta de once (11) páginas;

Que, mediante RESOLUCIÓN DECANAL Nº 093-2022-D-FCNM de fecha 26 de agosto de 2022 se Designó, Jurado Evaluador de Proyecto de Tesis para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática, del proyecto titulado: "FUNCIONES GAP MULTIPARAMÉTRICAS PARA LA REFORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE DESIGUALDAD VARIACIONAL COMO UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DIFERENCIABLE IRRESTRICTO"; presentado por el Bachiller RICRA MAYORCA JUAN MANUEL; Jurado que está integrado por los siguientes profesores: Dr. EUGENIO CABANILLAS LAPA (Presidente), Lic. ABSALÓN CASTILLO VALDIVIESO (Secretario), Dr. PEDRO CANALES GARCÍA (Vocal), Dr. EDINSON MONTORO ALEGRE (Suplente);

Que, estando vigente el Estado de Emergencia Nacional y de Aislamiento Social Obligatorio establecido en el marco del Decreto de Urgencia N° 026-2020 por las graves circunstancias que afectan la vida de la Nación a consecuencia del brote del COVID-19. Se ha emitido la Resolución de Consejo Universitario N° 068-2020-CU, de fecha 25 de marzo de 2020, mediante la cual se resuelve "autorizar con eficacia anticipada, del 16 de marzo de 2020, y hasta que concluya el estado de emergencia nacional, la modificación del lugar de la prestación de servicios docentes y administrativos;

Que, corrido el trámite de la solicitud del recurrente, el presidente del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis presenta en forma virtual en mesa de partes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, el 07 de octubre de 2022, el

Dictamen del proyecto de Tesis titulado: "FUNCIONES GAP MULTIPARAMÉTRICAS PARA LA REFORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE DESIGUALDAD VARIACIONAL COMO UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DIFERENCIABLE IRRESTRICTO"; presentado por el Bachiller RICRA MAYORCA JUAN MANUEL, el cual ha sido evaluado y cumple con los requisitos para su aprobación;

Estando a lo glosado; a la documentación que obra en autos; a lo normado en el Reglamento de Grados y Títulos; y en uso de las atribuciones que le confiere el Art. 187° del Estatuto de la Universidad Nacional del Callao, modificado en Resolución de Asamblea Universitaria Nº 008-2022-AU, de fecha 28 de junio de 2022 y concordante con el Art. N° 70° de la ley universitaria, Ley N° 30220;

RESUELVE:

1º. APROBAR, con eficacia anticipada el Proyecto de Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, titulado: "**FUNCIONES GAP MULTIPARAMÉTRICAS PARA LA REFORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE DESIGUALDAD VARIACIONAL COMO UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DIFERENCIABLE IRRESTRICTO**"; presentado por el Bachiller RICRA MAYORCA JUAN MANUEL, en el Tercer Ciclo Taller de Tesis para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática, de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, de la Universidad Nacional del Callao.

2º. AUTORIZAR, a la Unidad de Investigación inscribir el tema de tesis y su autor señalado en la presente Resolución, en el Libro de Registro de Tesis, de acuerdo con el Reglamento de Grados y Títulos vigente.

3º. TRANSCRIBIR, la presente Resolución a los miembros del Jurado Evaluador, profesor asesor, Escuela Profesional y Departamento Académico de Matemática, Unidad de Investigación, Comisión de Grados y Títulos e interesado, para conocimiento y fines.

REGÍSTRESE, COMUNÍQUESE Y ARCHÍVESE

Fdo. **Dr. JUAN ABRAHAM MÉNDEZ VELÁSQUEZ**. -Decano y Presidente del Consejo de Facultad de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

Fdo. **Mg. GUSTAVO ALBERTO ALTAMIZA CHÁVEZ**.-Secretario Académico
Lo que transcribo a usted para los fines pertinentes.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez
Decano

PROVEÍDO N°633-2022-D-FCNM

Ref. : **Dictamen Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis**
III CICLO TALLER DE TESIS FCNM 2021
Bach. RICRA MAYORCA, Juan Manuel
Escuela Profesional de Matemática

DERÍVESE, el documento indicado de la referencia a la **Oficina de Secretaría Académica de la FCNM**, para la emisión de la respectiva resolución.

Bellavista, 07 de octubre de 2022

Atentamente,

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez
Decano

JAMV/hc
Archivo

Dictamen

Asunto: Evaluación de Proyecto de Tesis.

Lugar: Facultad de Ciencias Naturales y Matematica.

Fecha: 01 de Octubre de 2022.

Los que suscribimos: Dr. Pedro Canales García, Lic. Absalón Castillo Valdivieso., Dr. Edinson Montoro Alegre y Dr. Eugenio Cabanillas Lapa, designados por Resolución Decanal No Nº 093-2022-D-FCNM del 26de Agosto de 2022, como Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis: "Funciones GAP multiparamétricas para la reformulación de problemas de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable irrestricto"; presentado por el Bachiller RICRA MAYORCA Juan Manuel, para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática, por la modalidad de tesis sin ciclo de tesis , cumplimos en dictaminar, después de una exhaustiva y meticulosa revisión, que: el Proyecto en mención reúne los requisitos exigidos para su aprobación, y continuación del trámite correspondiente.

Dr. Pedro Canales García

Lic. Absalón Castillo Valdivieso

Dr. Edinson Montoro Alegre

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

“FUNCIONES GAP MULTIPARAMÉTRICAS PARA LA REFORMULACIÓN DE PROBLEMAS DE DESIGUALDAD VARIACIONAL COMO UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DIFERENCIABLE E IRRESTRICTO”

AUTOR:

JUAN MANUEL RICRA MAYORCA

ASESOR:

MG. EVER FRANKLIN CRUZADO QUISPE

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN:

ANÁLISIS NUMÉRICO Y MATEMÁTICA COMPUTACIONAL.

Callao, 2022

PERÚ

Juan Manuel Ricra Mayorca

Bachiller

Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe

Asesor

INFORMACIÓN BÁSICA

FACULTAD	:	Facultad de Ciencias Naturales y Matemática - UNAC
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN	:	Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática - UNAC
TÍTULO	:	Funciones gap multiparamétricas para la reformulación de problemas de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable e irrestricto.
AUTOR	:	Juan Manuel Ricra Mayorca (ORCID: 0000-0001-8789-6572)
ASESOR	:	Mg. Ever Franklin Cruzado Quispe (ORCID: 0000-0001-8045-6785)
LUGAR DE EJECUCIÓN	:	Facultad de Ciencias Naturales y Matemática - UNAC
UNIDAD DE ANÁLISIS	:	Problema de desigualdad variacional
TIPO DE INVESTIGACIÓN	:	Básica
ENFOQUE DE INVESTIGACIÓN	:	Cuantitativo
DISEÑO DE INVESTIGACIÓN	:	No experimental
TEMA OCDE	:	Matemáticas Puras (1.01.01) https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La teoría de desigualdades variacionales fue introducida por Hartman y Stampacchia (1966) como una herramienta para el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales con aplicaciones principalmente a la mecánica.

La teoría de desigualdades variacionales de dimensión finita apareció cuando Dafermos (1980) reconoció en las condiciones de equilibrio del tráfico de redes una estructura de una desigualdad variacional. Esto reveló una nueva metodología para el estudio de problemas en economía, ciencias de la gerencia e ingeniería con un enfoque en transporte.

La teoría de desigualdades variacionales proporciona una herramienta para formular una variedad de problemas de equilibrio (tráfico de redes, economía de costos, equilibrio en finanzas, entre otros); analizando cualitativamente los problemas en términos de existencia y unicidad de las soluciones, estabilidad y análisis de sensibilidad, y proporcionando algoritmos acompañados con análisis de convergencia para propósitos computacionales.

Existen varios métodos para resolver un problema de desigualdad variacional, algunos de ellos se obtienen reformulando el problema principal, generando sistemas de ecuaciones, problemas de complementariedad, problemas de punto fijo y problemas de optimización.

En el trabajo de investigación se estudiará el problema de desigualdad variacional y su reformulación como un problema de optimización diferenciable y sin restricciones mediante una función gap adecuada. Esto permitirá que el problema original sea más tratable al poder admitir las diferentes y abundantes técnicas en la teoría de optimización.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la realidad problemática

El problema de desigualdad variacional (*PDV)*, consiste en encontrar un vector $x \in K$ tal que

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \ , \ \forall y \in K$$

donde K es un subconjunto no vacío de R^n, F una función: $F : R^n \rightarrow R^n$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno en R^n (Facchinei & Pang, 2003). Cuando el conjunto K es el ortante no negativo de R^n, este problema se reduce al problema de complementariedad no lineal (*PCN*).

Muchos problemas de equilibrio (tráfico de redes, economía de costos, equilibrio en finanzas, entre otros) pueden ser formulados como un problema de desigualdad variacional, pero resolver dicho problema de manera directa es un poco complicado ya que no se cuentan con muchos métodos o técnicas para su solución o son complicadas de aplicar, por ello es recomendable reformular el PDV como un problema de optimización ya que se cuentan con abundantes metodologías para su solución en dicho campo de estudio.

Reformular el PDV como un problema de optimización requiere del empleo de una función adecuada; las funciones gap son empleadas generalmente para dicho fin, pero estas requieren cumplir ciertas propiedades o condiciones necesarias para poder reformular el PDV. Si bien en la literatura actual existen funciones gap paramétricas, es decir, funciones gap que dependen de un parámetro, sin embargo, no se ha encontrado una función gap multiparamétrica que permita reformular el PDV como un problema de optimización diferenciable e irrestricto, las causas que originan dicho problema son las siguientes:

1. No es sencillo establecer las condiciones para que un punto estacionario de una función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional.

2. No es sencillo establecer las condiciones para que a partir de la función gap multiparamétrica se pueda obtener una cota de error global para el problema de desigualdad variacional

3. No es sencillo obtener un método iterativo basado en la función gap que permita resolver el problema de desigualdad variacional.

A continuación, veremos los diferentes tipos de funciones gap y sus características principales.

Una función de valores reales definida en R^n o en un subconjunto de este, es llamada una función gap para el *PDV*, si el conjunto de minimizadores globales en un conjunto dado coincide con el conjunto solución del *PDV* (Hu & Song, 2009). Una función gap sirve como una herramienta para desarrollar algoritmos para solucionar el *PDV* y analizar sus propiedades de convergencia.

Auslender (1976) consideró la función gap definida por:

$$f(x) = \sup \ \langle F(x), x - y \rangle \, , \ y \in K$$

No es difícil probar que f es no negativa sobre el conjunto K y que $f(x) = 0$ sí, y sólo si, $x \in K$ y x resuelve el *PDV*. Esta función gap permite reformular el *PDV* como un problema de optimización con restricciones equivalente:

$$\text{minimizar } f(x)$$

$$\text{sujeto a } x \in K,$$

Esta función gap no es, en general, ni convexa ni diferenciable. Además, cuando el Conjunto K es no acotado, f en general, puede tomar valores no finitos.

Fukushima (1992) consideró la función gap regularizada $f_\alpha : R^n \to R$ definida por:

$$f_\alpha(x) = \text{máx}\left\langle F(x), x-y \right\rangle - \left(\frac{\alpha}{2}\right)\|x-y\|^2,\ y \in K$$

Donde α es un parámetro positivo. Esta función gap superó las desventajas presentadas en la función gap de Auslender en el sentido que f_α es diferenciable (de ahí el término de función gap regularizada). Esta función permite reformular el *PDV* como un problema de optimización con restricciones, siendo equivalente a:

$$\text{minimizar } f_\alpha(x)$$

$$\text{sujeto a } x \in K,$$

No es difícil probar aquí también que x es una solución del *PDV* sí, y solo sí, x minimiza f_α en el conjunto K y $f_\alpha(x) = 0$

Peng (1997), consideró una función llamada función D-gap $M_\alpha : R^n \to R$ definida por:

$$M_\alpha(x) = f_{1/\alpha}(x) - f_\alpha(x)$$

Donde f_α es la función gap regularizada de Fukushima y α es una constante mayor que uno, la función M_α permite reformular el *PDV* como un problema de optimización diferenciable sin restricciones. Esta función es definida como la diferencia de dos funciones gap, de ahí el nombre de función D-gap. Esta función es la base de la teoría de funciones D-gap. En las funciones gap, gap regularizadas y D-gap, los parámetros que intervienen son fijos.

Dado el análisis expuesto bajo el esquema de problematización orientado a las variables de estudio (*PDV* y función gap), el presente trabajo de investigación tiene como propósito determinar una función gap multiparamétrica generalizando la función M_α que permita reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable y sin restricciones.

1.2 Formulación del problema

1.2.1 Problema general

¿Es posible determinar una función gap multiparamétrica que permita reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable e irrestricto?

1.2.2 Problemas específicos

1. ¿Cuáles son las condiciones para que un punto estacionario de la función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional?

2. ¿Cuáles son las condiciones para que a partir de la función gap multiparamétrica se pueda obtener una cota de error global para el problema de desigualdad variacional?

3. ¿Se puede establecer un método iterativo basado en la función gap multiparamétrica que permita resolver el problema de desigualdad variacional?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Determinar una función gap multiparamétrica que permita reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable e irrestricto.

1.3.2 Objetivos específicos

1. Establecer las condiciones para que un punto estacionario de la función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional.

2.Determinar las condiciones para que a partir de la función gap multiparamétrica se pueda obtener una cota de error global para el problema de desigualdad variacional.

3.Establecer un método iterativo basado en la función gap multiparamétrica que permita resolver el problema de desigualdad variacional.

1.4 Justificación

Desde una perspectiva teórica, el estudio aportará información teórica relevante acerca del problema de desigualdad variacional y de las funciones gap; los cuales permitirán sistematizar y organizar un corpus teórico-conceptual acerca de dichas temáticas, llenando a su vez el vacío de conocimiento existente en nuestro medio.

El aporte metodológico de esta investigación consistirá en presentar una nueva metodología que permitirá determinar una función gap, al que llamaremos función gap multiparamétrica ya que depende de dos parámetros arbitrarios mayores que cero, esta metodología dará a conocer los pasos, métodos y procesos a seguir en la determinación de dicha función gap.

En cuanto a la importancia de la investigación, partiendo del entendido que, el problema de desigualdad variacional tiene múltiples implicancias en lo que se refiere a los problemas en economía, ciencias de la gerencia e ingeniería con un enfoque en transporte, se considera que el estudio a realizar tiene una gran importancia ya que actualmente, la realidad peruana presenta muchos problemas relacionados con las implicancias que tiene el PDV, por ende se requiere conocer nuevas metodologías y herramientas para formular dichos problemas; analizando cualitativamente los problemas en términos de existencia y unicidad de las soluciones, estabilidad y análisis de sensibilidad, y proporcionando algoritmos acompañados con análisis de convergencia para propósitos computacionales.

1.5 Delimitantes de la investigación

1.5.1 Teórica

La investigación presenta limitante teórica ya que la teoría de funciones gap multiparamétricas es escasa y no se encontraron estudios que hayan abordado el tema de investigación en relación con las dos variables de estudio (funciones gap multiparamétricas y problema de desigualdad variacional), pero esta limitante se superó buscando investigaciones que guarden relación con al menos una de las variables de estudio.

1.5.2 Temporal

La investigación presenta limitante temporal ya que se realizó durante tres meses en el ciclo de tesis, siendo este un tiempo reducido para el desarrollo de la investigación, pero esta limitante se superó a través de asesorías semanales de entre tres y cuatro veces, y de dos a tres horas cada una de ellas. Cabe mencionar también que el investigador no contó con el tiempo suficiente para el desarrollo de la investigación debido a que labora a tiempo completo y realiza estudios de posgrado, sin embargo, esta limitante se superó solicitando adelanto de vacaciones o licencia laboral para poder culminar con el presente estudio.

1.5.3 Espacial

La investigación no presenta limitante espacial ya que el estudio es de tipo básica o teórica y, además, no se trabajó con personas, animales o cosas.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

2.1.1 Nacionales

Baygorrea (2010) en su tesis titulada: Método del punto proximal para desigualdades variacionales en variedades riemannianas, cuyo objetivo central es: “Presentar una extensión del método de punto proximal con distancia de Bregman para resolver el *PDV*”. Bajo algunas hipótesis naturales sobre F, obtiene la convergencia de la sucesión generada por el método de punto proximal para una solución del problema planteado.

Paz (2011) en su tesis titulada: Desigualdades variacionales, soluciones y aplicaciones, propone como el objetivo central de su estudio: “Presentar la teoría sobre desigualdades variacionales”. En la investigación se muestra una breve reseña de la teoría sobre *PDV* y los casos que se presentan. Se hace referencia a ejemplos que ilustran diversas formulaciones de un *PDV*. Se presentan los resultados más importantes de optimización no diferenciable debido a que en los problemas de aplicación con frecuencia se encuentra funciones con un número finito de puntos de no diferenciabilidad. Y finalmente se presentan los métodos posibles de solución de un *PDV*.

Mandujano (2013) en su tesis titulada: Solución de un problema de desigualdad variacional en R^n usando el método del punto proximal exacto con distancia de Bregman, propone como objetivo central de su estudio: “Resolver el problema de desigualdad variacional utilizando el algoritmo de punto proximal generalizado”. En la investigación se estudia que bajo ciertas hipótesis este algorítmo genera una sucesión convergente el cual es la solución del problema de desigualdad variacional.

Ramos (2018) en su tesis titulada: Formulación variacional y existencia de solución en espacios de dimensión finita del problema de Equilibrio de Nash, propone como objetivo central de su estudio: "Reformular el problema de Equilibrio de Nash como un problema de desigualdad variacional". El trabajo demuestra la existencia de soluciones para un problema de desigualdad variacional mediante dos herramientas matemáticas: el teorema de punto fijo y la teoría de grado topológico.

2.1.2 Internacionales

Blanco Louro et al. (2003) en su artículo titulado: Sobre el uso de las desigualdades variacionales para el cálculo del problema de complementariedad no lineal, propone como objetivo central de su estudio: "Presentar la aplicabilidad de la función D-gap a los problemas de complementariedad no lineal". En la investigación se muestra la importancia para la resolución de los *PDV*, a partir del uso de funciones D-gap para reformular el PDV como un problema de optimización diferenciable sin restricciones y como una herramienta para formular algoritmos con la finalidad de solucionar el *PDV*.

Portilla (2008) en su tesis titulada: Modelo de asignación de tráfico en redes mediante desigualdades variacionales, propone como objetivo central de su estudio: "Presentar un método para resolver los modelos de asignación de tráfico en redes". En la investigación se formula modelos estáticos para los casos de demanda fija, mediante desigualdades variacionales y mediante programación matemática. Se expone el método de Douglas Rachford y el de Frank Wolfe para resolver los modelos planteados junto con una aplicación.

Ruiz-Garzón et al. (2015) en su artículo titulado: Convexidad generalizada: Aplicaciones a problemas variacionales, artículo científico publicado en el Boletín de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Sevilla, España, propone como objetivo central de su estudio: “Mostrar las aplicaciones de la convexidad generalizada y la monotonicidad generalizada en particular, al estudio de problemas variacionales”. En la investigación se muestra algunos resultados recientes sobre los problemas que están relacionados con la búsqueda de condiciones de equilibrio en los entornos físicos y económicos. Asi mismo, se estudia que si la convexidad juega un papel importante en los problemas de programación matemática, la monotonicidad juega también un papel similar en los problemas variacionales.

Es así que al constrastar los resultados expuestos en la literatura sobre el tema se observa la necesidad de generalizar las fucniones gap a partir de dominios multiparamétricos. El presente trabajo pretende responder a esta necesidad.

2.2 Bases teóricas

La presente sección está dedicada a exponer el marco teórico necesario para la concretización de los objetivos referentes al trabajo. Para esto seguiremos los resultados mostrados por Auslender (1986), Dafermos (1980), Fukushima (1992), Peng (1997), Yamashita et al.(1997) y Facchinei (2003).

2.2.1 Problema de desigualdad variacional

Equilibrio es un concepto central en numerosas disciplinas como son la economía, ciencias de la gerencia, investigación de operaciones e ingeniería.

Las metodologías que han sido aplicadas a la formulación, el análisis cualitativo, y el cómputo de equilibrio han incluido:

- Sistemas de ecuaciones
- Teoría de optimización
- Teoría de complementariedad
- Teoría de punto fijo

La teoría de desigualdades variacionales es una poderosa metodología para el estudio de los problemas de equilibrio.

La teoría de desigualdades variacionales fue introducida por Hartman y Stampacchia (1966) como una herramienta para el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales con aplicaciones principalmente a la mecánica.

La teoría de desigualdades variacionales en dimensión finita ocurrió en 1980 cuando Dafermos reconoció en las condiciones de equilibrio del tráfico de redes (el cuál fue iniciado por Smith en 1979) una estructura de una desigualdad variacional.

Esto revela una metodología para el estudio de problemas en economía, ciencias de la gerencia, y también en ingeniería, con un enfoque en transporte.

Hasta el momento muchos problemas han sido formulados y estudiados como problemas de desigualdad variacional, los cuales incluyen:

- Problemas de equilibrio en tráfico de redes
- Problemas de equilibrio en economía de costos

- Problemas de equilibrio en finanzas

Teoría de desigualdades variacionales

La teoría de desigualdades variacionales nos proporciona una herramienta para: formular una variedad de problemas de equilibrio; analizando cualitativamente los problemas en términos de existencia y unicidad de las soluciones, estabilidad y análisis de sensibilidad, y proporcionándonos algoritmos acompañados con análisis de convergencia para propósitos computacionales.

Esta teoría contiene, como casos especiales, los problemas clásicos en programación matemática como: sistemas de ecuaciones no lineales, problemas de optimización, problemas de complementariedad y también los relacionados con problemas de punto fijo.

Definición. Dado un subconjunto K del espacio euclidiano n-dimensional R^n y una aplicación $F: K \to R^n$, el problema de desigualdad variacional $PDV(F,K)$, consiste en encontrar un vector $x^* \in K$ tal que

$$\left\langle F(x^*), x - x^* \right\rangle \geq 0, \quad \forall x \in K \qquad (1)$$

El conjunto solución de este problema es denotado por $SOL(F,K)$. En la investigación se considerará al conjunto K convexo, cerrado y no vacío y, la función F es continuamente diferenciable ya que muchos resultados requieren esas condiciones. Matemáticamente algunos resultados no requieren la convexidad de K.

Dado que K es cerrado y F es continua, se sigue que $SOL(F,K)$ es siempre un conjunto cerrado.

Una primera interpretación geométrica del $PDV(F,K)$, específicamente de la desigualdad en (1.1), es que un punto x en el conjunto K es solución del $PDV(F,K)$ sí y solamente sí $F(x)$ forma un ángulo no obtuso con todo vector de la forma $y-x$ para todo y en K. Formalizaremos esta observación usando el concepto de cono normal. Específicamente asociado con el conjunto K y algún vector x' como el siguiente conjunto:

$$\mathcal{N}(x';K) \equiv \{d \in R^n: \quad d^T(y-x') \leq 0, \ \forall y \in K\} \qquad (2)$$

Vectores en este conjunto son llamados vectores normales al conjunto K en x'. La desigualdad (2) claramente dice que un vector $x \in K$ resuelve el $PDV(F,K)$ sí y solamente sí $-F(x)$ es un vector normal a K en x; ó equivalentemente

$$0 \in F(x) + \mathcal{N}(x;K) \qquad (3)$$

El cono normal juega un rol importante en análisis convexo y programación no lineal. Este rol persiste en el estudio del PDV. La inclusión en (3) es llamada la ecuación generalizada.

Muchos problemas matemáticos pueden ser formulados como problemas de desigualdad variacional, y varios ejemplos aplicables al análisis de equilibrio siguen.

2.2.2 Función gap

Hasta ahora, tenemos presentado varias reformulaciones del PDV y del problema de complementariedad PC como un sistema de (no restringido) ecuaciones. Un acercamiento diferente debe hacerse al PDV/PC como un problema de minimización. Para ilustrar esto comenzaremos con el problema de complementariedad no lineal $PCN(F)$. Es claro que un vector x soluciona este problema sí y solamente sí x es un minimizador global del problema de optimización:

$$\begin{aligned} & minimizar \;\; y^T F(y) \\ & sujeto\ a \quad y \geq 0 \quad \text{y} \quad F(y) \geq 0, \end{aligned} \tag{4}$$

y el valor objetivo óptimo $x^T F(x)$ es igual a cero. En este sentido, decimos que el problema de optimización (4) es equivalente al PCN y llamamos a la función $y^T F(y)$ un función gap para el $PCN(F)$. Generalizando la discusión de arriba damos la siguiente definición de una función gap.

Definición. Una función gap para el $PDV(F, K)$ en un conjunto (cerrado) $K \subseteq X$ es una función no negativa $\theta: X \to R_+$ tal que $x \in SOL(F, K)$ sí y solamente sí $x \in X$ y $\theta(x) = 0$, esto es, sí y solamente sí las soluciones del $PDV(F, K)$ conincide con las soluciones globales del problema

$$\begin{aligned} & minimizar \;\; \theta(y) \\ & sujeto\ a \quad y \in X \end{aligned}$$

y el valor objetivo óptimo de este problema es cero.

Si $SOL(F, K)$ es vacío, entonces cualquier valor óptimo global de θ sobre X es positivo ó θ no tiene un mínimo global en X. Indicamos que a no ser que F sea afín, el conjunto factible de (4) es típicamente no convexo. Además, siempre para un $PCN(q, M)$ donde $F(y) = q + M(y)$, la función objetivo de (4) es no convexa a no ser que M sea una matriz semidefinida positiva. Esto nos incrementa el problema ha encontrar una «buena» función gap, donde el significado exacto de «buena» claramente depende del uso que tenemos en mente para la función gap. En lo que sigue primero consideraremos algunos tipos básicos de funciones gap y entonces dos de sus usos.

La reformulacines presentadas arriba conducen a unas funciones gap para solucionar el PDV/PC. Específicamente, supongamos que el sistema

$$H(x) = 0$$

esta es una reformulación del PDV/PC donde H mapea $\mathcal{D} \subseteq R^n$ en R^n. Podemos entonces asociar la siguiente función de valor escalar:

$$\theta(x) \equiv \| H(x) \|^r , \quad x \in \mathcal{D}, \tag{5}$$

donde r es algún entero positivo, como una función gap para el PDV/PC. Así,

$$\theta_{min}(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} min(x_i, F_i(x))^2$$

es una función gap para el $PCN(F)$; más generalmente, si ψ es una C-función, entonces

$$\theta(x) \equiv \| F_\psi(x) \|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i, F(x_i))^2$$

es una función gap para el mismo problema.

Definición. Una función $\psi: R^2 \to R$ es llamada una C-función, si para algún par $(a, b) \in R^2$,

$$\psi(a, b) = 0 \Leftrightarrow [(a, b) \geq 0 \;\; y \;\; ab = 0]$$

Esta clase de función gap puede ser muy efectivo en el desarrollo de algoritmos para el PCN y para alguna de sus extensiones, pero es típicamente no viable para un PDV general. En este último caso es usualmente preferible el uso de funciones gap que son obtenidos de diferente manera. Presentaremos aquí una función gap alternativa para el PDV esta es la base de todas las funciones gap discutidas en los subsecuentes análisis y esta no es obtenida de una reformulación (ecuación). Esta función gap, es llamada la *función gap de*

Auslender, extiende la reformulación (4) del PCN esto es convierte este problema en un problema de optimización restringido.

Específicamente, esta función gap para el $PDV(F,K)$ es definido en el mismo dominio $\mathcal{D}$ de F y es dado por:

$$\theta_{gap}(x) \equiv \sup_{y \in K} F(x)^T(x-y), \ x \in \mathcal{D} \supseteq K. \quad (6)$$

Esta es una función «de valor extendido» en K; $\theta_{gap}(x)$ es nonegativo para todo $x \in K$; sin embargo es posible que $\theta_{gap}(x)$ sea infinito para algún x en K. En particular, cuando K es un cono, tenemos:

$$\theta_{gap}(x) = \begin{cases} F(x)^T x & si \ \ F(x) \in \ K^* \\ +\infty & en \ \ otro \ \ caso \end{cases}$$

En general, vemos que $x \in SOL(F,K)$ sí y solamente sí x es una solución del problema de minimización gap restringido:

$$\begin{aligned} & minimizar \ \ \theta_{gap}(z) \\ & sujeto\ a \quad z \in K, \end{aligned} \quad (7)$$

y $\theta_{gap}(x) = 0$. Así $\theta_{gap}(x)$ es una función gap para el $PDV(F,K)$ en K.

Cuando K es un cono, el programa gap toma una forma particular simple:

$$\begin{aligned} & minimizar \ \ x^T F(x) \\ & sujeto\ a \quad x \in K \ \ y \ \ F(x) \in K^* \end{aligned} \quad (8)$$

Para $K = R_+^n$, este problema es exactamente (4). Un rasgo significativo del problema de optimización (8) es que si F es una función suave y K es «agradable» (por ejm. un poliedro), (8) es un problema de optimización suave, aunque en general, ninguna función objetivo es convexa ni la región factible es convexa.

Para un $PDV(F,K)$ general, la función gap es definido como la *función valor* de un problema de maximización cóncavo paramétrico con una función objetivo lineal $y \mapsto F(x)^T(x-y)$: más precisamente, $\theta_{gap}(x)$ es igual al valor objetivo optimo del siguiente problema de optimización con variable y y parámetro x:

$$\begin{aligned} &minimizar \;\; F(x)^T(x-y) \\ &sujeto\, a \quad y \in K \end{aligned} \tag{9}$$

Para x fijo y arbitrario, este es un problema de optimización cóncavo en y. En el caso de un poliedro K (i.e., para un PDV linealmente restringido), el problema (9) es un programa lineal. En este caso, la función gap es siempre no diferenciable.

Si F es monótono afín dada por $F(x) = q + M(x)$ donde q es un n-vector y M es una matriz semidefinida positiva, la función gap $\theta_{gap}(x)$ es un función convexa de valor extendido y el programa gap (7) llega a ser un problema de minimización convexa. La clase de PDV_s «monótonos» (incluyendo los problemas no lineales) es muy importante en aplicaciones. Muchos resultados especializados y algoritmos existen para esos PDV_s.

A continuación daremos un ejemplo que refuerza lo estudiado arriba.

Ejemplo. Sea $f: [0,2] \to R$ una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & si \;\; 0 \leq \;\; x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2} & si \;\; 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Entonces gracias a f, vamos ha construir una función gap, el cual es, en general, ni convexa, ni diferenciable. En efecto, f es continuamente diferenciable pues,

$$F(x) = f'(x) = \begin{cases} x & si\ \ 0 \leq \ x \leq 1 \\ 1 & si\ \ 1 < x \leq 2 \\ \end{cases}$$

Sea,

$$\theta_{gap}(x) = \sup_{y \in [0,1]} F(x)^T(x-y)$$

$$= \max_{y \in [0,1]} F(x)^T(x-y)$$

Así,

$$\theta_{gap}(x) = \begin{cases} x^2 & si\ \ 0 \leq \ x \leq 1 \\ x & si\ \ 1 < x \ \leq 2 \\ \end{cases}$$

Claramente esta función θ_{gap} no es convexa, ni diferenciable en $[0,2]$.

2.3 Marco conceptual

Función gap multiparamétrica

Es una función gap que es expresada como la diferencia de dos funciones gap y que dependen cada una de ellas de dos o más parámetros, su utilidad es que sirven para poder reformular un problema de desigualdad variacional como un problema de optimización (Facchinei, 2003).

Función de mérito

Es una función no negativa asociada a un problema de desigualdad variacional, donde las soluciones de dicho problema coinciden con las soluciones globales del problema de minimización y el valor objetivo óptimo de este problema es cero (Facchinei, 2003).

Cono normal

El cono normal de un conjunto convexo es un objeto geométrico fundamental en análisis convexo. La importancia de este cono se debe en parte a su estrecha conexión con las condiciones necesarias de primer orden de un problema de optimización restricto (Facchinei, 2003).

2.4 Definición de términos básicos

Optimización

Consiste en la selección de una alternativa mejor, en algún sentido, que las demás alternativas posibles (Izmailov & Solodov, 2014).

Problema de optimización

Consiste en maximizar o minimizar una función real eligiendo sistemáticamente valores de entrada (tomados de un conjunto permitido) y computando el valor de la función. Se componen generalmente de tres elementos: función objetivo, variables y restricciones (Izmailov & Solodov, 2014).

Función objetivo

Es la medida cuantitativa del funcionamiento del sistema que se desea optimizar (maximizar o minimizar) (Izmailov & Solodov, 2014).

Variables

Representan las decisiones que se pueden tomar para afectar el valor de la función objetivo (Izmailov & Solodov, 2014).

Restricciones

Representan el conjunto de relaciones (expresadas mediante ecuaciones e inecuaciones) que ciertas variables están obligadas a satisfacer (Izmailov & Solodov, 2014).

Resolver un problema de optimización

Consiste en encontrar el valor que deben tomar las variables para hacer óptima la función objetivo satisfaciendo el conjunto de restricciones (Izmailov & Solodov, 2014).

Sistemas de ecuaciones lineales – no lineales

No existe una función objetivo como tal. Únicamente interesa encontrar una solución factible a un problema con un conjunto de restricciones (Izmailov & Solodov, 2014).

Optimización sin restricciones

Se trata de encontrar el conjunto de valores de las variables que determinan el mínimo/máximo de una función. Algunas de las técnicas que se verán en programación no lineal son para optimización sin restricciones (Izmailov & Solodov, 2014).

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis

Hipótesis general

H_i: Existe una función gap multiparamétrica que permite reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable e irrestricto.

Hipótesis específicas

H_1: Existen condiciones para que un punto estacionario de la función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional.

H_2: Existen condiciones para que a partir de la función gap multiparamétrica se pueda obtener una cota de error global para el problema de desigualdad variacional.

H_3: Existe un método iterativo basado en la función gap multiparamétrica que permite resolver el problema de desigualdad variacional.

3.1.1 Operacionalización de variables

Definición conceptual de variables

Para este trabajo se considerarán las siguientes variables:

Variable 1: Problema de desigualdad variacional

Variable 2: Función gap

Para facilidad del lector, brindaremos un pequeño concepto con respecto a cada una:

Problema de desigualdad variacional. El problema de desigualdad variacional (PDV), consiste en encontrar un vector $x \in K$ tal que $\langle F(x), y - x \rangle \geq 0$,

$\forall y \in K$ donde K es un subconjunto no vacío de R^n y F una función: $F : R^n \to R^n$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno en R^n.

Función gap. Una función de valores reales definida en R^n o en un subconjunto de este, es llamada una función gap para el PDV, si el conjunto de minimizadores globales en un conjunto dado coincide con el conjunto solución del PDV.

Operacional de variables

Variable	Dimensiones	Indicadores	Método	Técnica
V1: Problema de desigualdad variacional	Formulaciones del *PDV.*	-Sistema de ecuaciones -Problemas de optimización -Problemas de complementariedad - Problemas de punto fijo.	Método inductivo-deductivo	Documentos cualitativos
	Resultados básicos de existencia y unicidad de la solución.	-Condiciones de existencia y unicidad de la solución.	Método de análisis y síntesis Método de escritorio o biblioteca	Revisión bibliográfica Trabajo con equipos de investigación
	Estabilidad y análisis de sensibilidad de las soluciones.	-Análisis cualitativo de modelos de equilibrio		
V2: Función gap	Funciones gap y algoritmos de solución	-Condiciones para que un punto estacionario de la función gap sea solución del PDV.	Método inductivo-deductivo	Documentos cualitativos
	Soluciones inexactas y cotas de error.	-Condiciones para que a partir de la función gap se pueda obtener una cota de error global para el PDV.	Método de análisis y síntesis Método de escritorio o biblioteca	Revisión bibliográfica Trabajo con equipos de investigación

IV. METODOLOGÍA DEL PROYECTO

4.1 Diseño metodológico

El tipo de investigación es básica ya que se busca incrementar los conocimientos existentes, pero sin contrastarlos con ningún aspecto práctico. El diseño de la investigación es no experimental ya que no se manipulan ninguna de las variables de estudio. La investigación corresponde a un nivel descriptivo ya que se describirán cada una de las variables y sus dimensiones. El estudio tiene un enfoque cualitativo ya que se busca interpretar y comprender el problema de investigación. La investigación es tipo documental ya que se procura obtener, seleccionar, compilar, organizar, interpretar y analizar información sobre las variables de estudio a partir de fuentes documentales, tales como libros, documentos de archivo, hemerografía, registros audiovisuales, entre otros.

Teniendo en cuenta el tipo y diseño de la investigación, el plan para poder responder a las preguntas de investigación se hará a través de tres etapas:

La primera etapa consiste en la consulta documental teniendo en cuenta el contexto general y realización de una revisión específica en base a las palabras claves.

En la segunda etapa realizaremos un contraste de la información, validando el material, aclarando dudas, accediendo a nuevos materiales y la retroalimentación por parte del asesor y de un equipo de investigación (expertos en el tema).

En la tercera etapa haremos un análisis histórico, donde estudiaremos la evolución de los conocimientos sobre el tema.

4.2 Método de investigación

En la investigación se empleará el método inductivo – deductivo, el método de análisis y síntesis y el método de escritorio o biblioteca.

Con respecto al método inductivo – deductivo, se empleará en el procesamiento de la información obtenida con el objetivo de establecer regularidades o de inferir a partir de conocimientos, o regularidades de carácter general y su manifestación en un fenómeno o situación particular.

El método de análisis y síntesis se utilizará durante todo el proceso de la investigación a partir de la bibliografía consultada.

Finalmente, en el método de escritorio o de biblioteca se revisarán y analizarán los datos obtenidos previamente obtenidos a través de la Internet y revisión bibliográfica.

4.3 Población y muestra

Por la naturaleza de la investigación, tratándose de un estudio cualitativo documental, la población y muestra no aplica.

4.4 Lugar de estudio

El lugar donde se hará la investigación será en los ambientes de la biblioteca y sala de cómputo de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, los cuales cuentan con buena iluminación, ventilación y ofrecen un ambiente silencioso, además, de contar con artículos de escritorio, pc y conexión a internet.

4.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información

La investigación se realizará teniendo en cuenta la técnica de análisis de documentos cualitativos por cuanto se basa en el análisis de documentos existentes en archivos y artículos de internet, repositorios nacionales como Renati-Sunedu, Alicia-Concytec, repositorios internacionales como Google Académico, Springer Link, entre otros y, también usaremos las técnicas de la revisión bibliográfica (libros, artículos impresos). Debido a la naturaleza del trabajo se usarán como instrumentos para la recolección de la información una matriz de categorías y una ficha de registro, pero hay que tener en cuenta que los trabajos, la bibliografía o la literatura que se explorará es de alta relevancia para un sector significativo de la comunidad matemática.

4.6 Análisis y procesamiento de datos

Para el análisis y procesamiento de la información se organizarán, analizarán e interpretarán las teorías y conceptos, teniendo en cuenta los criterios de validez que tienen que ver con:

A) Coherencia argumentativa

B) Nivel interpretativo

C) La consistencia de las conclusiones

Para ello es importante el contraste de la información, validar el material y recibir retroalimentación del asesor y el trabajo con equipos de investigación, el cual nos brindará información proporcionada por expertos en los temas de estudio.

4.7 Aspectos éticos en investigación

En este estudio se respetarán los derechos de autor, para ello se citarán y referenciarán las fuentes consultadas empleando las normas APA séptima edición. Asimismo, se aplicará un programa antiplagio para evaluar el porcentaje de similitud.

V. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

Actividades	2021												2022			
	Mayo				Junio				Julio				Agosto			
	Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4	Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4	Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4	Semana 1	Semana 2	Semana 3	Semana 4
Capacitación teórica	■	■	■													
Componente 1: Establecer las condiciones para que un punto estacionario de la función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional				■	■	■	■									
Componente 2: Determinar las condiciones para que a partir de la función gap multiparamétrica se pueda obtener una cota de error global para el problema de desigualdad variacional.					■	■	■	■								
Componente 3: Establecer un método iterativo basado en la función gap multiparamétrica que permita resolver el problema de desigualdad variacional						■	■	■	■							
Análisis y discusión de resultados									■	■	■	■				
Digitalización y defensa de tesis													■	■	■	■

VI. PRESUPUESTO

Especificación	Costos (S/)
Materiales y equipo de oficina	1,500.00
Textos de especialidad	1,000.00
Fotocopias, impresiones y empastados	300.00
Servicio de internet y softwares	800.00
Revistas académicas	650.00
Ciclo de tesis	4,200.00
TOTAL	8,450.00

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Auslender, A. (1976). *Optimisation: Méthodes Numériques*. Masson.

Baygorrea, N. (2010). *Método del punto proximal para desigualdades variacionales en variedades riemannianas* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional del Callao]. http://repositorio.unac.edu.pe/handle/UNAC/108

Blanco Louro, A., Lema Fernández, C., & Pedrerira Andrade, L. (2003). Sobre el uso de las desigualdades variacionales para el cálculo del problema de complementariedad no lineal. *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA*, *11*(1), 27–40. https://www.researchgate.net/publication/26428332_Sobre_el_uso_de_las_desigualdades_variacionales_para_el_calculo_del_problema_de_complementariedad_no_lineal

Dafermos, S. (1980). Traffic Equilibrium and Variational Inequalities. *Transportation Science*, *14*(1), 1–105. https://doi.org/10.1287/trsc.14.1.42

Facchinei, F., & Pang, J. S. (2003). *Finite Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, Vol. 1*. Springer-Verlag.

Fukushima, M. (1992). Equivalent Differentiate Optimization Problems and Descent Methods for Asymmetric Variational Inequality Problems. *Mathematical Programming*, *53*, 99–110.

Hartman, P., & Stampacchia, G. (1966). On some non-linear elliptic differential-functional equations. *Acta Mathematica*, *115*(1), 271–310. https://doi.org/10.1007/BF02392210

Hu, Y. H., & Song, W. (2009). Generalized gap functions and error bounds for generalized variational inequalities. *Applied Mathematics and Mechanics*

(English Edition), *30*(3), 313–321. https://doi.org/10.1007/s10483-009-0305-x

Izmailov, A., & Solodov, M. (2014). *Optimização*. IMPA.

Mandujano, J. (2013). *Solución de un problema de desigualdad variacional en Rn usando el método del punto proximal exacto con distancia de Bregman* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional del Callao]. http://repositorio.unac.edu.pe/handle/UNAC/118

Paz, M. (2011). *Desigualdades variacionales, soluciones y aplicaciones* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional de Ingeniería]. http://cybertesis.uni.edu.pe/handle/uni/560

Peng, J. M. (1997). Equivalence of Variational Inequality Problems to Unconstrained Optimization,. *Mathematical Programming*, *78*(3), 347–355.

Portilla, I. (2008). *Modelo de asignación de tráfico en redes mediante desigualdades variacionales* [Tesis de pregrado, Universidad De Los Andes]. https://repositorio.uniandes.edu.co/bitstream/handle/1992/25532/u336610.pdf?sequence=1

Ramos, W. (2018). *Formulación variacional y existencia de solución en espacios de dimensión finita del problema de Equilibrio de Nash* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional del Callao]. http://repositorio.unac.edu.pe/handle/UNAC/4532

Ruiz-Garzón, G., Hernández-Jiménez, B., Osuna-Gómez, R., & Rufián-Lizana, A. (2015). Convexidad generalizada: Aplicaciones a problemas variacionales. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, *31*(2), 137–

149. http://hdl.handle.net/11441/56353

Yamashita, N., Taji, K., & Fukushima, M. (1997). Unconstrained Optimization Reformulations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *92*(3), 439–456.

VIII. ANEXOS

Anexo1: Matriz de consistencia

PROBLEMAS	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA	POBLACIÓN Y MUESTRA	VARIABLES
General	**General**	**General**	**Tipo y diseño de investigación**		
¿Es posible determinar una función gap multiparamétrica que permita reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable e irrestricto?	Determinar una función gap multiparamétrica que permita reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable e irrestricto.	Existe una función gap multiparamétrica que permite reformular el problema de desigualdad variacional como un problema de optimización diferenciable e irrestricto.	Tipo de estudio básica Diseño de investigación no experimental		
Específicos	**Específicos**	**Específicos**	**Método de investigación**	Por la naturaleza de la investigación, tratándose de un estudio cualitativo documental, la población y muestra no aplica.	Variable 1: Problema de desigualdad variacional Variable 2: Función gap
1. ¿Cuáles son las condiciones para que un punto estacionario de la función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional?	1.Establecer las condiciones para que un punto estacionario de la función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional.	1.Existen condiciones para que un punto estacionario de la función gap multiparamétrica sea solución del problema de desigualdad variacional.	Método inductivo – deductivo Método de análisis y síntesis Método de escritorio o biblioteca		
2. ¿Cuáles son las condiciones para que a partir de la función gap multiparamétrica se pueda obtener una cota de error global para el problema de desigualdad variacional?	2. Determinar las condiciones para que a partir de la función gap multiparamétrica se pueda obtener una cota de error global para el problema de desigualdad variacional.	2.Existen condiciones para que a partir de la función gap multiparamétrica se pueda obtener una cota de error global para el problema de desigualdad variacional.			
3. ¿Se puede establecer un método iterativo basado en la función gap multiparamétrica que permita resolver el problema de desigualdad variacional?	3. Establecer un método iterativo basado en la función gap multiparamétrica que permita resolver el problema de desigualdad variacional.	3.Existe un método iterativo basado en la función gap multiparamétrica que permite resolver el problema de desigualdad variacional.			